



DiAMEnT

dostrzec i aktywizować
możliwości, energię, talenty



PROGRAMY ZAJĘĆ POZASZKOLNYCH

TYLKO OSZLIFOWANY DIAMENT ŚWIECI
**PROGRAM ZAJĘĆ POZASZKOLNYCH
Z MATEMATYKI
DLA UCZNIÓW ZDOLNYCH
KLAS I-III / IV LICEUM I TECHNIKUM**

**Autor:
ALEKSANDER RYBSKI**

NOWY SĄCZ 2013



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Szanowni Państwo

Oddajemy w Państwa ręce **Program zajęć pozaszkolnych z matematyki dla uczniów zdolnych szkół ponadgimnazjalnych (licea, technika) „Tylko oszlifowany diament świeci”** opracowany w ramach projektu „DiAMEnT - dostrzec i aktywizować możliwości, energię, talenty – realizowanego w ramach Priorytetu IX *Rozwój wykształcenia i kompetencji w regionach*, Działanie 9.1.2 *Wyrównywanie szans edukacyjnych uczniów z grup o utrudnionym dostępie do edukacji oraz zmniejszanie różnic w jakości usług edukacyjnych*, współfinansowanego przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego Program Operacyjny Kapitał Ludzki w latach 2007 – 2013.

Program, który przekazujemy Państwu jako propozycję materiału metodycznego **został przetestowany** na zajęciach pozaszkolnych zrealizowanych w Powiatowych Ośrodkach Wspierania Uczniów Zdolnych w latach szkolnych 2010/2011 oraz 2011/2012 zorganizowanych i przeprowadzonych w ramach projektu DiAMEnT.

Program „Tylko oszlifowany diament świeci” ma charakter nowatorski i skierowany jest do uczniów, którzy wykazują się zdiagnozowanymi poznawczymi uzdolnieniami kierunkowymi z zakresu matematyki.

Innowacyjność programu polega na tym, że proponuje się zajęcia dla uczniów zdolnych prowadzone metodą projektu z wykorzystaniem strategii PBL – problem based learning – uczenie się na bazie problemu / uczenie się w oparciu o problem - strategii edukacyjnej, która cechuje się tym, że uczymy się poprzez rozwiązywanie problemu. Realizujemy z uczniami projekt edukacyjny nie tyle dla uzyskania określonego produktu końcowego lecz przede wszystkim dla rozwiązania problemu, a poszukiwanie tego rozwiązania pozwoli nabyć uczniom określone umiejętności i poszerzyć wiedzę w danym obszarze tematycznym objętym projektem.

Program „*„Tylko oszlifowany diament świeci”*” został opracowany z myślą o zajęciach pozaszkolnych, ale może być także wykorzystany przez nauczycieli w ramach zajęć lekcyjnych bądź zajęć pozalekcyjnych poświęconych tematyce z zakresu matematyki.

Program „*Tylko oszlifowany diament świeci”* **posiada obudowę metodyczną w postaci *Materiałów pomocniczych*** do programu, które zawierają materiały merytoryczne i wskazówki metodyczne do realizacji projektów edukacyjnych zaproponowanych w programie.

Specyfiką *Programu zajęć pozaszkolnych* jest to, że został on opracowany dla etapu, nie ma więc tutaj podziału treści programowych na klasy. Taki charakter programu wynika z faktu, że adresatami są uczniowie zdolni, a ich możliwości i potrzeby nie zawsze są związane z poziomem klasy. Tak *Program zajęć pozaszkolnych* jak i *Materiały pomocnicze* są **otwartą propozycją**, z której nauczyciel i grupa uczniów zdolnych mogą skorzystać, mogą proponowane treści uzupełnić lub z niektórych zrezygnować, tematy projektów mogą przyjąć do realizacji w proponowanej formie, zmodyfikować je lub w ramach danego modułu sformułować nowy temat. Duża swoboda w wyborze treści uzależniona jest od możliwości grupy, ale przede wszystkim od zainteresowań uczniów, którzy powinni współdecydować o tematyce projektu oraz jego zakresie merytorycznym.

Te cechy odróżniają w sposób zasadniczy *Program zajęć pozaszkolnych* od programów nauczania przedmiotu, które obligują nauczyciela do zrealizowania określonych treści programowych na poziomie danej klasy. *Program zajęć pozaszkolnych* nie obliguje nauczyciela do zrealizowania zawartych w nim treści w określonym czasie, ale jest pomocą w dobieraniu ciekawych treści przedmiotowych do realizacji projektów edukacyjnych. Zaproponowane w programie projekty edukacyjne w większości mają **charakter międzyprzedmiotowy**, dlatego też obok treści przedmiotowych proponuje się treści z innych dyscyplin, **które przy realizacji projektu pozwalają uczniowi na zdobycie umiejętności o charakterze interdyscyplinarnym**.

„*Tylko oszlifowany diament świeci*” wraz z obudową to program otwarty, który może stać się pomocą i inspiracją dla nauczyciela i uczniów w realizacji projektów edukacyjnych.

Nauczycielom i uczniom życzymy satysfakcji z realizacji ciekawych projektów edukacyjnych i radości wspólnego uczenia się.

**Autorzy programu
Zespół projektu DiAMeNT**

Założenia dydaktyczno-wychowawcze programu

Postępująca globalizacja stawia przed edukacją nowe wyzwania mające na celu wyposażenie ucznia – obywatela w takie umiejętności, które umożliwią mu elastyczne dostosowanie się do zmian zachodzących w świecie. Parlament Europejski i Rada UE w zaleceniach z dniach 18 grudnia 2006 r. określa ramy odniesienia w zakresie kompetencji kluczowych rozumianych jako „połączenie wiedzy, umiejętności i postaw odpowiednich do sytuacji”¹. Zgodnie z tym dokumentem kompetencje matematyczne „obejmują umiejętność rozwijania i wykorzystywania myślenia matematycznego w celu rozwiązywania problemów wynikających z codziennych sytuacji. Istotne są zarówno proces i czynność, jak i wiedza, przy czym podstawę stanowi należyte opanowanie umiejętności liczenia. Kompetencje matematyczne obejmują – w różnym stopniu – zdolność i chęć wykorzystywania matematycznych sposobów myślenia (myślenie logiczne i przestrzenne) oraz prezentacji (wzory, modele, konstrukty, wykresy, tabele)”¹.

Doświadczenie w pracy dydaktyczno – wychowawczej z uczniami potwierdza potrzebę podejmowania działań, które spowodują, że uczniowie podstawowe umiejętności (nie tylko matematyczne) takie jak: czytanie, pisanie, liczenie, korzystanie z technologii informacyjnych i komunikacyjnych będą postrzegać nie jako czynność szkolną, ale jako konieczność użyteczną w życiu.

Podstawowym założeniem programu zajęć pozaszkolnych z matematyki dla uczniów zdolnych „*Tylko oszlifowany diament świeci*” jest stwarzanie takich sytuacji edukacyjnych, które umożliwią uczniom wejście w rolę badacza i odkrywcy, który globalnie patrzy na otaczającą go rzeczywistość. Umożliwi to nowatorskie podejście do metody projektu. Stosowana w praktyce edukacyjnej metoda projektu traktowana jest jako jednorazowe przedsięwzięcie o dużej złożoności, ograniczone czasowo, mające charakter interdyscyplinarny, wymagające podejmowania działań dla uzyskania, zaprezentowania i ocenienia określonego rezultatu.

„Inność” tej metody w założeniach naszego *Programu* polega na zastosowaniu strategii PBL (problem based learning) czyli uczenia się na bazie problemu. Włączenie tej strategii do metody projektu powoduje, że najważniejszym elementem

¹ Zalecenie Parlamentu Europejskiego i Rady z dnia 18 grudnia 2006 r. w sprawie kompetencji kluczowych w procesie uczenia się przez całe życie (2006/962/WE)

procesu edukacji staje się poszukiwanie rozwiązania problemu, a nie końcowy rezultat. Nauczyciel proponuje moduł projektowy, czyli obszar tematyczny, który ma szeroki zakres – dotyczy otaczającej rzeczywistości, uwzględnia przyszłość, ma odniesienie społeczne, umożliwia wyzwianie emocji, jest interesujący dla uczniów. Uczniowie odgrywają wiodącą rolę w wybraniu lub określaniu konkretnego tematu projektu (pytania napędzającego *driving question* - problemu) i tempa pracy. Może się okazać, że uczniowie będą chcieli iść w kierunku, w którym nauczyciel nie czuje się pewnie. Stąd istotna jest zmiana postrzegania nauczyciela, jako osoby, która wszystko musi wiedzieć, a uczniowie wykonują tylko to, co jest zaplanowane przez niego. Nauczyciel w założeniach strategii PBL nie jest zarządcą, ale trenerem, pomocnikiem, rzecznikiem, partnerem. Organizuje sytuację problemową, która prowokuje podjęcie przez ucznia czynności związanych z rozwiązywaniem problemów takich jak: stawianie pytań, formułowanie problemów i hipotez (werbalizacja zagadnienia), poszukiwanie rozwiązań, weryfikacji hipotez, prezentowanie i argumentowanie rozwiązania. Projekt edukacyjny jest rozumiany jako problem oparty o rzeczywiste doświadczenie świata, który należy rozwiązać, albo przybliżyć się do jego rozwiązania. Projekt się nie kończy – jest otwarty, prowokuje inne projekty – problemy. Kształcenie umiejętności rozwiązywania problemów w sposób twórczy ułatwi uczniom w przyszłości uczestniczenie w życiu społecznym i zawodowym, pełnym sytuacji nowych, nieznanymi, często skomplikowanych. Rozwiązanie problemu wymaga samokształcenia i współdziałania. Współdziałanie z kolei inspiruje i wyzwala nowe obszary aktywności, co daje lepszy efekt niż wyniki pracy indywidualnej każdego ucznia z osobna.

Opracowując program zajęć pozaszkolnych według zaprezentowanej koncepcji, Autorzy przyjęli następujące założenia (postulaty) w zakresie kształcenia matematycznego uczniów zdolnych na wszystkich etapach kształcenia:

- doskonalenie sprawności rachunkowej, w tym także w zakresie: posługiwania się własnościami liczb i działań oraz stosowania poznanych algorytmów w prowadzeniu rozumowań;
- kształtowanie wyobraźni geometrycznej (w tym sprawności manualnej) i intuicji matematycznej;
- rozwijanie umiejętności precyzyjnego formułowania wypowiedzi oraz rzetelnego argumentowania;

- kształcenie umiejętności algorytmizacji i konstruowania schematów rozumowania
- motywowanie do naukowego poznawania świata;
- kształtowanie umiejętności dostrzegania związków i zależności za pomocą faktów matematycznych;
- rozwijanie myślenia analitycznego i syntetycznego;
- pokazanie użyteczności matematyki poprzez poznawanie i opisywanie najbliższego otoczenia (obserwowanie, dostrzeganie i analizowanie problemów, stawianie pytań i formułowanie odpowiedzi),
- rozwijanie umiejętności posługiwania się technologiami informacyjno-komunikacyjnymi (dla wyszukiwania i korzystania z informacji, prezentowania rozwiązań problemów itp.).

Program zakłada także wszechstronny rozwój osobowości, a w szczególności:

- rozwijanie postawy dociekliwości - tendencji do ciągłego zwiększania posiadanej wiedzy,
- kształtowanie racjonalizmu – sprawdzania otrzymanych wyników i korygowania błędów, klasyfikacji opartej na logicznych fundamentach,
- rozwijanie zdolności poznawczych (obserwacji, koncentracji i podzielności uwagi),
- rozwijanie umiejętności twórczego korzystania z posiadanej wiedzy – z własnego warsztatu badawczego - (precyzyjne formułowanie wypowiedzi, logiczne uzasadnianie sądów, poprawne wyciąganie wniosków),
- doskonalenie umiejętności planowania pracy samodzielnej, indywidualnej oraz zespołowej (dobrej organizacji pracy),
- kształtowanie pozytywnego nastawienia do podejmowanego wysiłku – pracowitości, systematyczności, wytrwałości w dążeniu do celu, przestrzegania porządku.

Program adresowany jest do uczniów zdolnych, a więc tych, którzy szybciej i łatwiej opanowują wiadomości i umiejętności oraz potrafią je wykorzystać bardziej wszechstronnie niż czynią to inni w tych samych warunkach zewnętrznych. Analiza procesu myślenia pozwala wskazać czynności uznawane powszechnie za matematyczne, będące jednocześnie podstawą twórczego myślenia (nie tylko w dziedzinie matematyki).

J. Janowicz² wyróżnia cztery typy czynności psychicznych związanych ze zdobywaniem wiedzy identyfikujących ucznia uzdolnionego matematycznie:

➤ **POSTRZEGANIE**, czyli umiejętność

- konstruowania matematycznego modelu sytuacji spoza tej dyscypliny, powiązana z myśleniem elastycznym, niestereotypowym,
- odkrywania i samodzielnego stawiania problemów,
- eksplorowania czyli aktywnego i skutecznego badania sytuacji zewnętrznej,
- zauważania nierozwiązanych problemów - stawiania i weryfikacji hipotez,
- dostrzegania swojej niewiedzy;

➤ **PRYZYWAJANIE**, czyli umiejętność

- różnicowania i syntezy,
- abstrahowania i uogólniania,
- swobodnego (pewnego) wyodrębniania właściwych warunków określających pojęcie,
- klasyfikowania,
- kojarzenia i odkrywania powiązań logicznych;

➤ **PRZETWARZANIE**, czyli umiejętność

- sprawnego wyciągania wniosków oraz przewidywania skutków zaplanowanej czynności,
- analizowania tego, co zostało już zrobione i tego, co jeszcze zostało do zrobienia,
- elastycznego myślenia czyli sprawnego transferowania umiejętności z jednej dziedziny lub działu na inny oraz odwracania rozumowania,
- szybkiego kondensowania przyswajanego materiału,
- samokontroli przeprowadzonego rozumowania od strony treściowej i formalnej,
- interpretowania rezultatu rozumowania matematycznego (istnienia rozwiązania lub sprzeczności),

➤ **PRZECHOWYWANIE**, czyli umiejętność

² Jerzy Janowicz, *Kształcenie uczniów uzdolnionych matematycznie*, Instytut Kształcenia Nauczycieli w Warszawie ODN we Wrocławiu, Wrocław 1985

- zapamiętywania wiedzy w sposób mechaniczny (przechowywanie związków, algorytmów, zależności) i logiczny (przechowywanie wiedzy matematycznej w postaci uogólnionej, zredukowanej struktury),
- sprawnego powiązania wiedzy występującej w różnych działach matematyki, dziedzinach życia lub pojawiającej się w odległych od siebie terminach.

Przedstawione umiejętności z jednej strony charakteryzują ucznia zdolnego (poprzez zauważalny wyższy ich poziom niż u przeciętnego ucznia), a z drugiej wyznaczają kierunek pracy z uczniem uzdolnionym matematycznie (systematyczny rozwój tych czynności). Treści kształcenia i wynikające z nich osiągnięcia proponowane w prezentowanym *Programie* zostały dobrane tak, aby uczeń rozwijał swoje uzdolnienia przez ich wykorzystywanie do rozwiązania problemów.

W opracowywaniu programu uwzględniono fakt, że będzie on realizowany w grupach uczniów z etapu kształcenia, a nie klasy (np. grupa szkoły ponadgimnazjalnej to uczniowie klas I-III/IV). Stąd materiał nauczania proponowany w danym module obejmuje podstawę programową dla całego etapu. Projekt ma za zadanie integrować umiejętności i wiedzę, a nie treści. Dlatego, w przyjętej koncepcji programu ważną rolę odgrywa łączenie podstaw matematyki teoretycznej z zagadnieniami dotyczącymi innych dziedzin (np. ekologii, ekonomii, medycyny, fizyki itp.).

Program uwzględnia cele kształcenia, wymagania ogólne oraz treści nauczania, a także wymagania szczegółowe zapisane w *Podstawie programowej kształcenia ogólnego* w zakresie przedmiotu matematyka na poszczególnych etapach kształcenia. Ze względu na adresata (uczniowie zdolni), a także dla rozwiązania niektórych problemów konieczne będzie poszerzenie treści nauczania wynikających z *Podstawy programowej*.

Treści te pozwalają poznać inny świat matematyki, sploty przy obowiązującej podstawie programowej. Rozwijają wyobraźnię i poszerzają znacznie warsztat matematyczny ucznia. Pozwalają zastosować narzędzia matematyczne do innych dziedzin takich jak: fizyka, technika, ekonomia. Bardzo ważnym elementem prezentowanego *Programu* jest to, że realizacja każdego projektu pozwala na rozwijanie umiejętności zdobywanych w trakcie kształcenia ogólnego, o których mowa w *Podstawie programowej* – czytania (rozumienie, wykorzystanie i refleksyjne przetwarzanie tekstów prowadzące do osiągnięcia własnych celów, rozwoju osobowego oraz aktywnego uczestnictwa w życiu społeczeństwa), myślenia matematycznego, myślenia naukowego, komunikowania się, posługiwania

się nowoczesnymi technologiami informacyjno – komunikacyjnymi, wyszukiwania, selekcjonowania i krytycznej analizy informacji; rozpoznawania własnych potrzeb edukacyjnych oraz uczenia się; pracy zespołowej.

Przedstawiony *Program zajęć pozaszkolnych z matematyki dla uczniów zdolnych*, jak wskazuje tytuł, tworzony jest z myślą o zajęciach realizowanych poza szkołą z grupami uczniów, u których zostały zdiagnozowane uzdolnienia matematyczne, ale może być także wykorzystany w procesie dydaktyczno - wychowawczym w szkole – np. na zajęciach pozalekcyjnych koła matematycznego, w pracy z uczniem zdolnym w szkole, itp.

Przyjęte przez Autorów programu założenia koncepcyjne prowadzą do osiągnięcia przez uczniów następujących celów spójnych dla **wszystkich modułów projektowych, na każdym etapie kształcenia:**

Uczeń:

- rozumie kluczowe pojęcia modułu projektowego;
- stawia pytania: „Dlaczego tak jest jak jest?”, „Co się stanie gdy...” i poszukuje na nie odpowiedzi;
- rozumie zjawiska, zachowania, właściwości otaczającego świata;
- potrafi sformułować wnioski oparte na obserwacjach empirycznych dotyczących otaczającego świata;
- wyszukuje, porządkuje, selekcjonuje informacje z różnych źródeł;
- potrafi wyciągnąć wnioski z kilku informacji podanych w różnej postaci (tekstowej, liczbowej, graficznej,...);
- rejestruje, dokumentuje i prezentuje w różnych formach wyniki obserwacji, eksperymentowania, poszukiwania;
- potrafi zaplanować sposób rozwiązania problemu i prezentacji tego rozwiązania;
- potrafi dobrać odpowiedni model matematyczny do sytuacji;
- wykorzystuje narzędzia matematyki do rozwiązania problemu;
- stosuje technologie informacyjno – komunikacyjne (dla pozyskiwania informacji, wykorzystania do rozwiązania problemu i prezentowania tego rozwiązania);
- przejmuje inicjatywę przy rozwiązaniu problemu – potrafi zadać pytanie i poszukać na nie odpowiedzi;

- uzasadnia poprawność rozumowania używając fachowej terminologii;
- potrafi pracować w zespole – współdziałać w grupie;
- samodoskonaleni się w toku działalności własnej;
- dostrzega prawidłowości matematyczne w otaczającym świecie
- formułuje w języku matematyki problemy życia codziennego;
- potrafi krytycznie ocenić efekty pracy własnej i całego zespołu;
- poddaje pomysły na rozwiązanie problemów społeczności lokalnej i świata.

Struktura programu

Program składa się z trzech części tworzących logiczną całość:

- programu zajęć pozaszkolnych z matematyki dla uczniów zdolnych klas IV - VI szkoły podstawowej;
- programu zajęć pozaszkolnych z matematyki dla uczniów zdolnych klas I - III gimnazjum;
- programu zajęć pozaszkolnych z matematyki dla uczniów zdolnych szkół ponadgimnazjalnych (liceum, technikum).

W każdej z tych 3 części autorzy opracowali po 10 modułów projektowych.

Moduł projektowy obejmuje:

- temat modułu (obszar, dziedzina, która podlega badaniu);
- cele operacyjne do modułu projektowego – stanowią listę otwartą, są propozycją Autorów, która może być poszerzana i zmieniana przez nauczyciela i uczniów w zależności od potrzeb;
- kluczowe pojęcia do modułu projektowego – które wskazują ważne elementy w danym obszarze z punktu widzenia Autorów;
- proponowane tematy projektów - problemy do rozwiązania - pytania napędzające *driving question*;
- propozycję materiału nauczania związaną z tematyką modułu, tematami proponowanych projektów oraz proponowanymi celami;
- opis przykładowych założonych osiągnięć uczniów – które należy traktować jako listę otwartą do uzupełnienia.

Przedstawione elementy modułu projektowego stanowią listy otwarte, a to oznacza, że uczniowie mogą stawiać inne pytania w obrębie danego obszaru czy problemu, wykraczające poza proponowane treści nauczania. Dążymy do tego,

aby uczeń myślał i działał odważniej, pewniej, precyzyjniej. Osiągniemy to jeżeli stworzymy sytuacje (postawimy problemy), które pozwolą uczniowi wykorzystać lub wyzwolić aktywność, twórczość, aby w niepowtarzalny sposób (sposoby) rozwiązać problem.

Pamiętajmy o tym, że:

„ każde dziecko przejawia nieograniczoną ciekawość świata i odkrywania wszystkiego co znajduje się w jego otoczeniu”.

Satysfakcji z realizacji tego programu Uczniom i Prowadzącym życzą Autorzy:

Aleksander Rybski

Paweł Mrzygłód

MODUŁY PROJEKTOWE

MODUŁ I

Temat modułu projektowego: Matematyka nie jest po to, aby nauczyć liczyć.

Cele operacyjne modułu projektowego

Uczeń :

- potrafi zmienić tok myślenia i widzieć szerzej
- zauważa, że matematyka przydaje się do rozwiązywania problemów dnia codziennego – zagadki logiczne z wyższego poziomu
- potrafi rozróżniać twierdzenia;
- zapisuje twierdzenie przy pomocy symboli matematycznych;
- przeprowadza logiczny nieskomplikowany dowód;
- wykorzystuje sposób myślenia i postępowania do uzasadniania własności liczb*
- żongluje poznanymi własnościami i wykorzystując je dowodzi następne*
- opisuje językiem matematycznym zjawiska i zależności, które są twierdzeniami.*

Kluczowe pojęcia:

jednoznaczność lub niejednoznaczność rozwiązania problemu*

implikacja, kontrapozycja, równoważność,

założenie, teza,

twierdzenie proste i odwrotne,

dowód nie wprost,*

dowód indukcyjny,

liczby to nie tylko wartość – własności liczb*

uzasadnienia pewnych zależności

zasada szufladkowa Dirichleta.*

Proponowane tematy projektów

- 1. Jak sprawić, aby nasze myślenie było niestandardowe?
Jak zmienić swój tok myślenia, aby widzieć więcej i rozwiązać zagadki logiczne odnoszące się do życia codziennego.**
- 2. Jakie zastosowania mają twierdzenia matematyczne w logice?**

3. W jaki sposób wykorzystując wiadomości na temat dedukcji i dowodzenia twierdzeń, można uzasadnić ciekawe własności liczb? (impresje na liczbach).
4. Które twierdzenia łatwiej udowodnić metodą nie wprost?*
5. Jakie są metody dowodzenia twierdzeń określone dla zmiennej naturalnej, występujące w różnych dziedzinach? *

Propozycja materiału nauczania

Treści przedmiotowe:

- Elementy logiki: implikacja, równoważność, kontrapozycja, reguła przechodności implikacji.*
- Liczby są wszędzie – dowodzenie własności liczb
- Liczby i cyfry – zamiana miejsc, podzielność, ilość rozwiązań*
- Dowody podstawowych twierdzeń algebraicznych, geometrycznych i trygonometrycznych: niewymierność liczby $\sqrt{2}$, nierówność Bernoulliego.*
- Twierdzenie cosinusów.
- Tożsamości trygonometryczne.
- Kombinatoryka.*
- Indukcja matematyczna w różnych zastosowaniach.

Treści ponadprzedmiotowe:

- przykłady zagadek logicznych i sposobów ich rozwiązywania z różnych dyscyplin przedmiotowych z wykorzystaniem umiejętności matematycznych.

Opis założonych osiągnięć uczniów do modułu projektowego

Uczeń:

- potrafi podać znane zagadki z życia, które wymagają logicznego myślenia, aby zostały dobrze rozwiązane,
- znajduje błędy w złym rozumowaniu i potrafi uzasadnić swoje zdanie,
- potrafi wyszukać w podręcznikach matematyki i w Internecie różne rodzaje twierdzeń,
- potrafi zapisać liczby w różnych systemach
- wykorzystuje własności liczb, dowodzi nowe i potrafi je zastosować
- formułuje i zapisuje twierdzenie matematyczne,

- rozróżnia rodzaje twierdzeń i rodzaje dowodów,
- planuje sposób rozwiązania problemu i prezentację rozwiązania,
- opisuje językiem matematycznym rozumowania, które są twierdzeniami niekoniecznie w matematyce,
- wykorzystuje narzędzia matematyki do rozwiązania problemu.

MODUŁ II

Temat modułu projektowego: Pojęcie funkcji, ciągu i zastosowania liczby e

Cele operacyjne modułu projektowego

Uczeń:

- zna pojęcie odwzorowania zbiorów, funkcji ze zbioru w zbiór
- zna pojęcie ciągu i jego rodzaje
- potrafi stworzyć ciąg o zadanych własnościach
- potrafi obliczyć sumę skończonej, lub nieskończonej ilości wyrazów ciągu i stwierdzić czy i kiedy istnieje
- potrafi obliczyć granicę ciągu, sumę szeregu geometrycznego;
- rysuje wykres funkcji i funkcji do niej odwrotnej;
- oblicza wartość liczby e zadaną dokładnością;*
- opisuje językiem matematycznym zależności potęgowe, wykładnicze, zagadnienia geometryczne i trygonometryczne.

Kluczowe pojęcia:

odwzorowanie zbioru w zbiór

funkcja – dziedzina, zbiór wartości

własności funkcji

ciąg,

rodzaje ciągów

granica ciągu,

funkcja odwrotna,

szereg,

zbieżność szeregu

suma szeregu

funkcja wykładnicza i logarytmiczna,

skala wykładnicza i logarytmiczna,

funkcje hiperboliczne.

Proponowane tematy projektów:

1. Kiedy odwzorowanie jest funkcją?
2. Dlaczego ciągi są tak pomocne w rozwiązywaniu problemów dnia codziennego?
3. Skąd się wzięła liczba e ?*
4. W jakich funkcjach algebraicznych występuje liczba e ?*
5. Jakie jest zastosowanie liczby e w różnych dziedzinach?*

Propozycja materiału nauczania

Treści przedmiotowe:

- Odwzorowania zbiorów
- Które z odwzorowań są funkcjami, dziedzina i zbiór wartości.
- Jak można „zepsuć” funkcję? Czy odwzorowanie może stać się funkcją?
- Ciąg jako szczególny przykład funkcji
- Rodzaje ciągów
- Granice ciągów i sposoby ich wyznaczania.
- Funkcje odwracalne i odwrotne do danych.*
- Funkcja wykładnicza i logarytmiczna.
- Skala wykładnicza i skala logarytmiczna.*
- Funkcje hiperboliczne.*

Treści ponadprzedmiotowe:

- Ciekawe funkcje – wykorzystanie funkcji do rozwiązywania problemów.
- Zastosowanie liczby e do obliczania odsetek przy lokatach bankowych
- Zastosowanie arkusza kalkulacyjnego do podania przybliżenia liczby e , korzystając ze wzoru $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

Opis założonych osiągnięć uczniów do modułu projektowego

Uczeń:

- potrafi wskazać odwzorowania będące funkcjami i stwierdzić, że nie wszystkie są funkcjami i dlaczego
- rozumie pojęcia dziedzina, zbiór wartości i potrafi je wykorzystać
- rozróżnia ciągi i potrafi je wykorzystać do rozwiązania problemów
- oblicza granicę ciągu,
- wyznacza funkcję odwrotną do danej,
- rysuje wykres funkcji wykładniczej i logarytmicznej,
- sprawdza czy szereg ma sumę i ją wyznacza,
- wskazuje zastosowania liczby e , korzystając z literatury matematycznej i Internetu,
- opisuje zjawiska przyrodnicze przy użyciu zapisu matematycznego,
- stosuje technologie informatyczne do pozyskiwania informacji i prezentacji rozwiązania.

MODUŁ III

Temat modułu projektowego: Układy równań i nierówności – czy jest to dział algebry, a może geometrii czy trygonometrii?

Cele operacyjne modułu projektowego

Uczeń:

- podaje interpretację geometryczną równania i nierówności,
- zna pojęcie wartości bezwzględnej i potrafi je wykorzystać w praktyce
- rozwiązuje układ równań i nierówności różnymi metodami,
- potrafi wykonywać wykresy funkcji z wartością bezwzględną bez konieczności rozpatrywania przypadków
- opisuje językiem matematycznym w formie równań lub nierówności, zależności z różnych dziedzin.

Kluczowe pojęcia:

układy równań i nierówności liniowych, kwadratowych, wyższych stopni, wymiernych, trygonometrycznych,
układy równań i nierówności z wartością bezwzględną
układy równoważne;
interpretacja geometryczna układu równań i układu nierówności,
wykres równania,
wykres nierówności;
figury geometryczne.

Proponowane tematy projektów:

- 1. W jakich działach matematyki spotykamy układy równań i nierówności?**
- 2. Co wspólnego ma wartość bezwzględna z pralką, a co z odległością?**
- 3. Dlaczego wykorzystanie wartości bezwzględnej rozszerza możliwości?**
- 4. Jakie są zastosowania układów równań i nierówności w różnych dziedzinach? (np. w fizyce, chemii)**
- 5. W jaki sposób opisać figury geometrii płaskiej i przestrzennej układami równań, bądź nierówności?**

Propozycja materiału nauczania

Treści przedmiotowe:

- Rozwiązywanie układów równań i nierówności wszystkich typów.
- Interpretacja geometryczna niektórych typów równań i nierówności.
- Wzbogacenie zakresu treści poprzez wprowadzenie wartości bezwzględnej.
- Zadania geometryczne i trygonometryczne prowadzące do układów równań i nierówności.

Treści ponadprzedmiotowe:

- opisanie językiem matematycznym za pomocą równań i nierówności zależności z różnych dziedzin pozamatematycznych – zastosowania układów równań i nierówności w fizyce, chemii itp.
- opisanie figury geometrii płaskiej i przestrzennej za pomocą układów równań bądź nierówności.

Opis założonych osiągnięć uczniów do modułu projektowego

Uczeń:

- potrafi rozwiązywać typowe i nietypowe układy równań i nierówności,
- przedstawia graficznie wykres równań i nierówności liniowych, kwadratowych,
- uczeń potrafi rozwiązać algebraicznie i graficznie równania, nierówności, jak również układy równań i nierówności z wartością bezwzględną
- rozwiązuje i przedstawia graficznie równania i nierówności wykładnicze, logarytmiczne i trygonometryczne,
- tworzy układ równań do zadania tekstowego, geometrycznego lub trygonometrycznego,
- znajduje zastosowania układów równań i nierówności w fizyce, chemii,
- opisuje językiem matematycznym w postaci równań układów równań i nierówności treści zawarte nie tylko w zagadnieniach matematyki ale także innych dziedzin,
- stosuje technologie informatyczne do pozyskania, przetwarzania i prezentowania rozwiązania zadania.

MODUŁ IV

Temat modułu projektowego: Z miasta A do miasta B - czy mechanika jest częścią fizyki czy matematyki?"

Cele operacyjne modułu projektowego

Uczeń:

- potrafi określić i rozróżniać rodzaje ruchu,
- znajduje związki między drogą, prędkością i przyśpieszeniem,
- zna pojęcie pochodnej funkcji jednej zmiennej,
- potrafi zastosować pochodną w procesie badania przebiegu zmienności funkcji i przy tworzeniu wykresu funkcji,
- stosuje rachunek pochodnej i całkowy do wyznaczania wielkości fizycznych,
- opisuje językiem matematycznym zagadnienia i zjawiska z mechaniki i fizyki.

Kluczowe pojęcia:

ruch i jego rodzaje,

równanie ruchu,

droga, prędkość, przyśpieszenie średnie i chwilowe,

pochodna funkcji,

całka funkcji.

Proponowane tematy projektów

1. **Jak znaleźć minimum i maksimum lokalne funkcji oraz wartość największą i najmniejszą?**
2. **W jaki sposób pomóc sobie przy tworzeniu wykresów funkcji?**
3. **Jakie mogą być zastosowania funkcji zmiennej t w mechanice, a może jeszcze w innych działach fizyki?**
4. **Jakie jest zastosowanie pochodnej i całki w mechanice?**
5. **W jaki sposób można wyprowadzić równanie drogi w ruchu jednostajnie przyspieszonym, a może w jeszcze innym ruchu?**

Propozycja materiału nauczania

Treści przedmiotowe:

- Minimum i maksimum lokalne funkcji.*
- Wartość największa i najmniejsza funkcji w przedziale
- Pojęcie pochodnej funkcji w punkcie.*
- Całka funkcji zmiennej t .*

Treści ponadprzedmiotowe:

- Ruch jednostajny i niejednostajny.
- Prędkość i przyspieszenie w ruchu jednostajnym i niejednostajnym.*
- Funkcje zmiennej t i ich wykresy.
- Pochodna funkcji zmiennej t .
- Poznanie rodzajów ruchów.
- Wyznaczanie i stosowanie wzorów dotyczących drogi, prędkości i przyspieszenia w ruchu jednostajnym i niejednostajnym.
- Rysowanie wykresów drogi, prędkości i przyspieszenia.
- Dobra interpretacja wykresów drogi, prędkości i przyspieszenia.
- Rozróżnianie prędkości chwilowej od prędkości średniej.
- Rozróżnianie przyspieszenia chwilowego od przyspieszenia średniego.
- Stosowanie interpretacji fizycznej ilorazu różnicowego jako prędkości średniej.
- Opisanie zapisu i fizycznego.
- Stosowanie interpretacji fizycznej pochodnej jako prędkości chwilowej.
- Opisywanie językiem matematyki zagadnień z fizyki i mechaniki.
- Odnajdywanie zastosowań pochodnej i całki w mechanice.
- Wyprowadzenie równania drogi w ruchu jednostajnie przyspieszonym.
- Stosowanie metod informatycznych i wykorzystanie Internetu do pozyskiwania i rozwiązywania problemów fizycznych.

Opis założonych osiągnięć uczniów do modułu projektowego

Uczeń:

- potrafi znaleźć minimum i maksimum lokalne funkcji w przedziale
- rozróżnia pojęcia minimum i maksimum lokalnego od wartości największej i najmniejszej funkcji

- rozróżnia rodzaje ruchów,
- rysuje wykresy drogi, prędkości, przyspieszenia i podaje ich interpretację,
- rozróżnia prędkość średnią od chwilowej, przyspieszenie średnie od chwilowego,
- zna pojęcie pochodnej funkcji
- wiąże te pojęcia przy użyciu pochodnej i całki,
- rejestruje, dokumentuje i prezentuje w różnych formach wyniki obserwacji i eksperymentu,
- dostrzega prawidłowości matematyczne w otaczającym świecie,
- formułuje w języku matematyki problemy życia codziennego,
- stosuje metody informatyczne i wykorzystuje Internet do pozyskiwania i rozwiązywania postawionych przed nim problemów.

MODUŁ V

Temat modułu projektowego: Krzywe stożkowe a może jeszcze inne krzywe – wykres funkcji czy równania?

Cele operacyjne modułu projektowego

Uczeń:

- potrafi narysować wykres funkcji $f(x)$ i stworzyć wykresy funkcji: $f(-x)$, $-f(x)$, $f(x+a) + b$, $f(|x|)$, $|f(x)|$, $|f(|x|)$
- mając wykres funkcji $f(x)$, potrafi narysować wykresy: $S_{ox}(f(x))$, $S_{oy}(f(x))$, $S_{(0,0)}(f(x))$,
- opisuje krzywą równaniem lub układem parametrycznym,
- rozróżnia wykres równania od wykresu funkcji,
- znajduje zastosowania krzywych,
- rysuje wykresy krzywych,
- oblicza długość łuku krzywej i pole figury ograniczonej łukami krzywych,
- opisuje językiem matematycznym krzywe, oraz zjawiska w otaczającym nas świecie.

Kluczowe pojęcia:

wykres funkcji

przekształcenia wykresów funkcji

monotoniczność funkcji

iniekcja, suriekcja, bijekcja

okrąg, elipsa, hiperbola i parabola

krzywe wykładnicze, logarytmiczne

krzywe trygonometryczne i cyklometryczne

krzywe hiperboliczne

krzywe stożkowe

elementy krzywych: ognisko, kierownice, osie krzywych

całka oznaczona

długość łuku krzywej

pole figury ograniczonej łukami krzywych.

Proponowane tematy projektów

1. Jak przenieść i wykorzystać wiadomości z działu „przekształcenia na płaszczyźnie” do rysowania wykresów funkcji?
2. Dlaczego warto znać własności poszczególnych funkcji?
3. Jak zmierzyć długość łuku krzywej?
4. Jakie są zastosowania krzywych stożkowych w różnych dziedzinach?
5. Gdzie można znaleźć inne krzywe niż te, o których uczyłeś się na lekcjach matematyki i jak je zastosować?

Propozycja materiału nauczania

Treści przedmiotowe:

- Wykres funkcji jako źródło wiedzy i pomoc w opisie funkcji.
- Własności funkcji i ich wykorzystanie.
- Funkcje elementarne i odwrotne do nich.*
- Definicje krzywych stożkowych, elementy krzywych, wykresy i ich własności.*
- Wykresy równań algebraicznych i trygonometrycznych,

Treści ponadprzedmiotowe:

- Zagadnienia z astronomii: dzień, noc, pory roku, rok przestępny.*
- Odnajdywanie zastosowania krzywych w astronomii i technice
- Wytlumaczenie pojęć astronomicznych na gruncie matematyki
- Korzystanie z technologii informatycznych do rozwiązywania problemów
- Opisywanie językiem matematycznym krzywych oraz zjawisk w otaczającym nas świecie
- uzasadnianie poprawności rozumowania używając fachowej terminologii
- Rejestrowanie, dokumentowanie i prezentowanie wyników obserwacji, dotyczących obserwacji zjawisk w otaczającym nas świecie

Opis założonych osiągnięć uczniów do modułu projektowego

Uczeń:

- umie narysować wykres funkcji i opisuje jej własności na jego podstawie
- rysuje każdą elementarną krzywą,

- rozróżnia wykres funkcji od wykresu równania, -znajduje zastosowania krzywych w astronomii, technice itp.,
- konstruuje krzywe w oparciu o definicję,
- wykorzystuje technologie informatyczne do rozwiązania problemów,
- uzasadnia poprawność rozumowania używając fachowej terminologii,
- rejestruje, dokumentuje i prezentuje w różnych formach wyniki obserwacji, dotyczące zjawisk w otaczającym nas świecie.

MODUŁ VI

Temat modułu projektowego: **Wielomiany – czy przydałyby się na giełdzie?**

Cele operacyjne modułu projektowego

Uczeń:

- potrafi dobrze poruszać się w tematach związanych z funkcją kwadratową, równaniem i nierównością kwadratową
- wykorzystuje wzory Viete'a przy rozwiązywaniu równań z parametrem
- wykorzystuje funkcję kwadratową do rozwiązywania zadań optymalizacyjnych
- zna sposoby rozwiązywania równań trzeciego stopnia
- potrafi narysować wykres wielomianu,
- stosuje rachunek pochodnej do badania własności wielomianu, na podstawie wykresu wyznacza wzór wielomianu,
- opisuje językiem matematyki przy użyciu wielomianów zależności ekonomiczne.

Kluczowe pojęcia:

różne postaci trójmianu kwadratowego

wzory Viete'a i ich zastosowanie

równania i nierówności trzeciego stopnia

wielomian

wykres wielomianu

wzrost i spadek na giełdzie

miejsca zerowe i monotoniczność wielomianów wyższych rzędów

ekstrema wielomianów

interpolacja.

Proponowane tematy projektów

1. Jak wykorzystać pojęcie funkcji kwadratowej do opisanie problemów metodami matematycznymi?
2. W jaki sposób możemy pomóc sobie przy rozwiązywaniu równań i nierówności stopnia trzeciego?
3. Jakie są typy wielomianów i jak je narysować?
4. Jakie zależności z różnych dziedzin, przedstawione graficznie, można opisać wzorem wielomianowym ?

5. Jak można wykorzystać wielomiany do gry giełdowej?

Propozycja materiału nauczania

Treści przedmiotowe:

- Funkcja kwadratowa jako baza do materiału o wielomianach.
- Równania i nierówności trzeciego stopnia.*
- Wielomiany.
- Własności i wykresy wielomianów.
- Wielomian interpolacyjny Lagrangea.*

Treści ponadprzedmiotowe:

- Zadania optymalizacyjne i z parametrem.
- Monotoniczność i ekstrema wielomianów i ich związek z pochodną funkcji.
- Wyznaczanie wzoru wielomianu przy pomocy danych giełdowych
- Wykorzystanie własności wielomianów do gry giełdowej
- Sporządzanie wykresu działania spółki giełdowej korzystając z wielomianu interpolacyjnego Lagrangea
- Określenie na podstawie w/w wykresu i na podstawie monotoniczności wykresu kiedy warto kupić akcje, kiedy jest tendencja wzrostowa i spadkowa spółki itp.
- Opisanie językiem matematyki przy użyciu badania wielomianów zależności ekonomicznych.

Opis założonych osiągnięć uczniów do modułu projektowego

Uczeń:

- potrafi wykorzystać własności funkcji kwadratowej w zadaniach,
- potrafi rozwiązać i opisać równania trzeciego stopnia,
- potrafi przy pomocy pochodnej narysować wykres wielomianu,
- znajduje miejsca zerowe i ekstrema wielomianu,
- wyznacza wzór wielomianu w oparciu o wykres,
- próbuje wyznaczyć wzór wielomianu, przy pomocy danych giełdowych,
- potrafi wykorzystać własności wielomianu do gry giełdowej,
- wyszukuje, uporządkowuje i selekcjonuje informacje z różnych źródeł,
- formułuje językiem matematyki problemy giełdowe,
- potrafi pracować w zespole – współdziałać w grupie.

MODUŁ VII

Temat modułu projektowego: Co to znaczy zwinąć szereg, a co to znaczy rozwinąć funkcję w szereg?

Cele operacyjne modułu projektowego

Uczeń :

- zna pojęcie ciągu
- rozróżnia ciągi rekurencyjne, arytmetyczne i geometryczne
- potrafi liczyć sumę wyrazów ciągów
- potrafi znaleźć sumę szeregu geometrycznego i niektórych szeregów potęgowych,
- określa warunki zbieżności,
- stosuje kryterium zbieżności,
- oblicza pochodne wyższych rzędów,
- rozwija niektóre funkcje w szereg przy pomocy wzoru Taylora,
- opisuje przy pomocy symboli matematycznych szeregi, pochodne, rozumowania prowadzące do wyznaczenia sumy szeregu.

Kluczowe pojęcia:

ciąg liczbowy

ciąg rekurencyjny

ciąg arytmetyczny

ciąg geometryczny

szereg geometryczny i potęgowy

granica ciągu

suma szeregu

kryterium zbieżności szeregu

liczba e i π

funkcje trygonometryczne

i cyklometryczne.

Proponowane tematy projektów

1. Czym wyróżniają się ciągi i dlaczego o nich się uczymy?
2. W jakich sytuacjach wykorzystamy ciągi specjalne – rekurencyjne, arytmetyczne i geometryczne?
3. Jaki szereg i przy jakich warunkach można zwinąć?
4. W jaki sposób można rozwinąć funkcję w szereg?
5. Jak zastosować rozwinięcie funkcji w szereg?

Propozycja materiału nauczania

Treści przedmiotowe:

- Pojęcie ciągu,
- Rodzaje ciągów,
- Wzór na n-ty wyraz ciągu,
- Suma wyrazów ciągu,
- Granica ciągu,
- Szereg geometryczny i jego suma,
- Szereg potęgowy,
- Kryteria zbieżności szeregów potęgowych,
- Związek pochodnej wyższych rzędów z szeregami*
- Wzór Taylora i McLaurina, *
- Funkcje trygonometryczne i odwrotne do nich.*

Treści ponadprzedmiotowe:

- Stosowanie technologii informatycznych prowadzących do rozwiązania problemu.

Opis założonych osiągnięć uczniów do modułu projektowego

Uczeń:

- potrafi rozróżnić ciągi i opisać ich własności
- potrafi wykorzystać ciągi w zadaniach,
- umie policzyć sumę skończonej i nieskończonej ilości wyrazów ciągu, jeśli tylko istnieje,
- potrafi zwinąć szereg trygonometryczny i określić warunki przy których jest to możliwe,
- rozwija każdą elementarną funkcję w szereg potęgowy (jeżeli jest to możliwe),
- stosuje pochodne wyższych rzędów do rozwijania funkcji,
- przeprowadza rozumowanie prowadzące do wyznaczenia wartości liczb e i π oraz konstrukcji tablic wartości sinusa,
- wyszukuje, porządkuje i selekcjonuje informacje z różnych źródeł,
- stosuje technologie informatyczne prowadzące do rozwiązania problemu.

MODUŁ VIII

Temat modułu projektowego: Budujemy osiedle mieszkaniowe – czy budowle mogą mieć nietypowe kształty?

Cele operacyjne modułu projektowego

Uczeń:

- zna pojęcie wektora i potrafi go wykorzystać w rozwiązywaniu problemów,
- potrafi konstruować figury płaskie za pomocą cyrkla,
- dowodzi poprawności konstrukcji,
- potrafi rozróżnić skonstruowanie od narysowania,
- rozróżnia i określa bryły,
- oblicza powierzchnię, objętość brył,
- konstruuje/tworzy modele brył,
- stosuje całki do obliczania pola powierzchni i objętości brył obrotowych,
- opisuje językiem matematycznym i technicznym zagadnienia związane z budownictwem.

Kluczowe pojęcia:

wektory i działania na nich

figury płaskie i podstawowe konstrukcje

bryły

wielościany, graniastosłupy, ostrosłupy, bryły obrotowe

elipsoida, paraboloida, hiperboloida

pole powierzchni, objętość – kubatura

audyt

Proponowane tematy projektów

- 1. W jaki sposób możemy wykorzystać wektory, aby ułatwić rozwiązywanie zadań z geometrii analitycznej niezbędnych do rozwikłania problemów z życia codziennego?**
- 2. Jakie figury możemy skonstruować, a jakie tylko narysować?**
- 3. Jakie bryły można wykorzystać do budowy osiedla mieszkaniowego?**
- 4. Jak zastosować zasady optymalizacji w realnym życiu?**

5. W jaki sposób obliczamy pole powierzchni i objętość nietypowych brył np. obrotowych?

Propozycja materiału nauczania

Treści przedmiotowe:

- Wektor jako narzędzie pomocne nie tylko w geometrii
- Figury płaskie, rodzaje, sposoby konstrukcji, pola i obwody
- Bryły – pola powierzchni i objętość,
- Całka oznaczona i jej zastosowania. *

Treści ponadprzedmiotowe:

- Poznanie i stosowanie pojęć kubatura i audyt
- Opisywanie językiem matematycznym technicznym zagadnień związanych z budownictwem
- Umiejętność wyszukiwania brył do budowy osiedla mieszkaniowego
- Uzasadnianie do czego jest potrzebne pole powierzchni i objętość brył obrotowych z których zbudowano osiedle
- Wykorzystanie wiedzy matematycznej do zagadnień architektonicznych, ekonomicznych i inżynierskich.

Opis założonych osiągnięć uczniów do modułu projektowego

Uczeń:

- zna pojęcie wektora i potrafi wykonywać działania na wektorach,
- wykorzystuje wektory do dowodzenia własności figur,
- zna sposoby konstrukcji figur płaskich,
- potrafi obliczać pola powierzchni i obwody figur geometrycznych,
- potrafi obliczyć powierzchnię budowli i jej kubaturę,
- znajduje zastosowanie w praktyce pola powierzchni i objętości brył ,
- stosuje całkę oznaczoną do obliczania pól powierzchni i objętości brył obrotowych,
- wykorzystuje wiedzę matematyczną do zagadnień architektonicznych, ekonomicznych i inżynierskich,
- przygotowuje plan oraz makietę osiedla,
- stosuje fachową terminologię do opisu otaczającego nas Świata,
- wykorzystuje narzędzia matematyki i Internet do rozwiązania problemu.

MODUŁ IX

Temat modułu projektowego: Prawdopodobieństwo i statystyka – co możemy przewidzieć, czy to prawda czy fałsz ?”

Cele operacyjne modułu projektowego

Uczeń:

- zna podstawowe pojęcia kombinatoryki,
- potrafi zastosować poznane wzory do rozwiązania problemu,
- umie zbudować model probabilistyczny,
- rozróżnia średnie,
- interpretuje obliczenia,
- rysuje diagramy,
- samodzielnie zbiera i przetwarza dane statystyczne,
- buduje modele statystyczne,
- opisuje językiem matematyki zjawiska występujące w otaczającym nas świecie.

Kluczowe pojęcia:

permutacja, wariacja z powtórzeniami i bez powtórzeń, kombinacja

modele probabilistyczne

średnia arytmetyczna, geometryczna, harmoniczna, ważona, mediana, moda, stanina,

wariancja i odchylenie standardowe,

diagram kołowy, słupkowy.

Proponowane tematy projektów

- 1. Jak policzyć szansę wytypowania szóstki w lotto, a jak policzyć ilość możliwych liczb o danej liczbie cyfr?**
- 2. Dlaczego przy grze w „Trzy karty” jesteśmy skazani na przegraną, co to znaczy sprawiedliwa gra, kiedy jest sprawiedliwa?**
- 3. Co to znaczy „lepsza klasa z matematyki” ? W jaki sposób na podstawie analizy ocen końcowych z matematyki w dwóch wybranych klasach, można dokonać takiego wyboru?**

4. Co to znaczy „twarda waluta”? Jak ocenić na podstawie notowań euro i dolara do złotego, w okresie np. kwartału, która z tych walut jest mocniejsza?
5. W jaki sposób wyniki statystyczne opracowane przy użyciu średnich i odchylenia standardowego, można interpretować? Do czego służą diagramy?

Propozycja materiału nauczania

Treści przedmiotowe:

- Permutacje, wariacje, kombinacje i ich wykorzystanie w konkretnych przykładach
- Cały dział statystyki uwzględniający średnie, rozkłady zmiennych losowych oraz odchylenie standardowe i diagramy,
- Wykresy funkcji, krzywa Gaussa. *

Treści ponadprzedmiotowe:

- Analiza częstości zdarzeń, gra sprawiedliwa – projekt
- Obliczanie mody, mediany, wariancji i odchylenia standardowego w analizie danych w badaniach statystycznych
- Sporządzanie diagramów z wykorzystaniem programów komputerowych
- Dokonanie interpretacji wyników na potrzeby wniosków z badań
- Interpretowanie obliczeń i generowanie wniosków
- Przedstawienie wyników sposobem graficznym wykorzystując komputer
- Rozróżnianie średnich i ich wpływu na całościowe wyniki
- Umiejętność zbierania i przetwarzania danych statystycznych
- Umiejętność budowania modelu statystycznego na podstawie pozyskanych danych
- Zbieranie i przetwarzanie danych prasowych dla potrzeb statystyki
- Odczytywanie i interpretowanie diagramów umieszczonych w Internecie

Opis założonych osiągnięć uczniów do modułu projektowego:

Uczeń:

- zna pojęcia wariacji, permutacji, kombinacji

- potrafi stworzyć model dla konkretnej sytuacji i obliczyć ilość zdarzeń i prawdopodobieństwo
- potrafi rozróżnić gry sprawiedliwe od oszukańczych
- rozumie pojęcia statystyczne, średnie, odchylenie standardowe, skale - staniny oraz diagramy,
- potrafi samodzielnie zbierać i przetwarzać dane prasowe i z Internetu dla potrzeb statystyki,
- tworzy diagramy, umieć je czytać i interpretować,
- wykorzystuje przetworzone dane w zagadnieniach ekonomicznych i bankowości,
- opisuje przy pomocy diagramów i symboli matematycznych zjawiska ekonomiczne i z życia, które można obrabiać przy pomocy narzędzi statystycznych,
- uzasadnia poprawność rozumowania używając fachowej terminologii.

MODUŁ X

Temat modułu projektowego: Gdy niemożliwe staje się możliwe – liczby zespolone.

Cele operacyjne modułu projektowego

Uczeń:

własności liczb – starter wprowadzający

twierdzenia o liczbach

potrafi rozwiązać każde równanie kwadratowe,

rozdziela liczby,

przedstawia liczbę zespoloną w różnych postaciach,

wykonuje działania na liczbach zespolonych,

znajduje związek między funkcjami zespolonymi i przekształceniami

geometrycznymi,

opisuje wykresy i przekształcenia geometryczne oraz zależności trygonometryczne

funkcjami zespolonymi.

Kluczowe pojęcia:

systemy liczbowe

zbiory liczbowe i własności liczb

jednostka urojona,

liczba zespolona,

płaszczyzna zespolona,

zbiór domknięty ze względu na działania arytmetyczne,

funkcja zespolona,

rozwiązanie rzeczywiste,

rozwiązanie zespolone.

Proponowane tematy projektów

- 1. Jakie systemy liczbowe występują w matematyce, a jakie wykorzystujemy w życiu?**
- 2. Jakie liczby znamy i jak dowieść pewnych własności liczb?**
- 3. Jak rozwiązać równanie $x^2 + px + q = 0$?**

4. Jak wykonać działania na liczbach zespolonych, przedstawionych w różnych postaciach ?
5. Jakie istnieją związki geometrii i trygonometrii z liczbami zespolonymi?

Propozycja materiału nauczania

Treści przedmiotowe:

- Systemy liczbowe
- Działania w systemach innych niż dziesiętny*
- Zamiana liczb
- Dowodzenie własności liczb*
- Równania algebraiczne stopnia n ,
- Działania w zbiorze liczb zespolonych,*
- Równania zespolone, *
- Wykresy równań na płaszczyźnie zespolonej, *
- Wzory de Moivre'a.*

Treści ponadprzedmiotowe:

- Dostrzeganie prawidłowości matematycznych w otaczającym Świecie
- Związek systemu dwójkowego z komputerem

Opis założonych osiągnięć uczniów do modułu projektowego

Uczeń:

- rozumie kluczowe pojęcia modułu projektowego,
- potrafi zapisać każdą liczbę w różnych systemach
- potrafi wykonać działania na liczbach
- umie udowodnić własności liczb
- potrafi przedstawić na płaszczyźnie zespolonej wykres równania zmiennej zespolonej,
- oblicza pierwiastek z liczby zespolonej,
- podnosi liczbę zespoloną do kwadratu,
- przedstawia przekształcenie geometryczne w postaci funkcji zespolonej,
- znajduje związek liczb i funkcji zespolonych z geometrią i trygonometrią,
- potrafi wyciągać wnioski z informacji podanych w różnych źródłach,
- rozwija matematyczne myślenie,

- dostrzega prawidłowości matematyczne w otaczającym Świecie,
- korzysta z podręczników akademickich i Internetu

Słownik terminów związanych z systemem wspierania uczniów zdolnych

• Zdolności

Wewnętrzne właściwości (różnice indywidualne), które sprawiają, że przy jednakowej motywacji i uprzednim przygotowaniu poszczególni ludzie osiągają w porównywalnych warunkach zewnętrznych niejednakowe rezultaty w uczeniu się i działaniu. (Z. Pietrasiński, 1975)

Takie wewnętrzne właściwości człowieka, które umożliwiają mu sprawność, biegłość, szybkość, niezawodność wykonania określonych operacji intelektualnych lub sensomotorycznych. (M. Chruszczewski, 2005)

Indywidualna, różnicująca ludzi właściwość psychiczna, związana z łatwością odbierania i przetwarzania informacji o świecie. (Szewczuk, 1975)

Właściwość ludzkiej osobowości posiadająca podłoże organiczne, warunkujące sprawne i skuteczne wykonywanie zarówno prostych, złożonych jak i bardzo skomplikowanych działań związanych z nauką lub pracą.

• Rodzaje zdolności

Zdolności ogólne niezbędne dla wykonywania podstawowych operacji intelektualnych, np. liczbowe, słowne

Zdolności specjalne inaczej kierunkowe, niezbędne dla wykonywania złożonych działań, związane z określonymi dziedzinami bądź formami działalności, np. plastyczne, matematyczne, muzyczne

Zdolności specjalne często są utożsamiane z uzdolnieniami (J. Strelau)

• Uzdolnienia

Określony układ właściwości , dzięki którym człowiek osiąga ponadprzeciętne (na tle grupy odniesienia) rezultaty w danej dziedzinie aktywności. Aktywność ta wymaga nie tylko operacji elementarnych, ale wykorzystania zasobów jako zorganizowanej sekwencji działań o wyższym stopniu złożoności. (M. Chruszczewski)

Wiążą się z określoną sferą aktywności, określane są jako zdolności „do czegoś”, do pewnych rodzajów czy dziedzin działalności (np. muzycznej, plastycznej, literackiej).

- **Talent / Szczególne uzdolnienia**

Szczególny przypadek uzdolnienia; taki układ właściwości fizycznych, zdolności oraz innych cech człowieka, dzięki którym osiąga on wybitne (na tle grupy odniesienia) rezultaty w danej dziedzinie aktywności. (M.Chruszczewski)

Najwyższy stopień rozwoju uzdolnień. (B.Hornowski)

Pojęcie wyższe hierarchicznie niż uzdolnienie – nie każda osoba uzdolniona ma talent, ale każda osoba utalentowana ma uzdolnienia specjalne; talent przejawia się w efektach działalności twórczej, która cechuje się nowością, oryginalnością, społeczną użytecznością i generatywnością; czynniki kształtowania talentu to: wysoki poziom uzdolnień specjalnych, iloraz inteligencji powyżej przeciętnej, wysoki poziom uzdolnień twórczych, struktura osobowości zapewniająca efektywność działań, aktywność własna, środowisko sprzyjające rozwojowi uzdolnień oraz czynnik losowy.

- **Uczeń zdolny, uczeń uzdolniony**

Uczeń zdolny to taki, który z **racji wysokiego poziomu zdolności ogólnych** w podobnych warunkach przewyższa innych uczniów w wykonywaniu tych samych działań, wykazując silne zaangażowanie w zadanie; jego osiągnięcia są zwykle wysokie, oryginalne i twórcze.

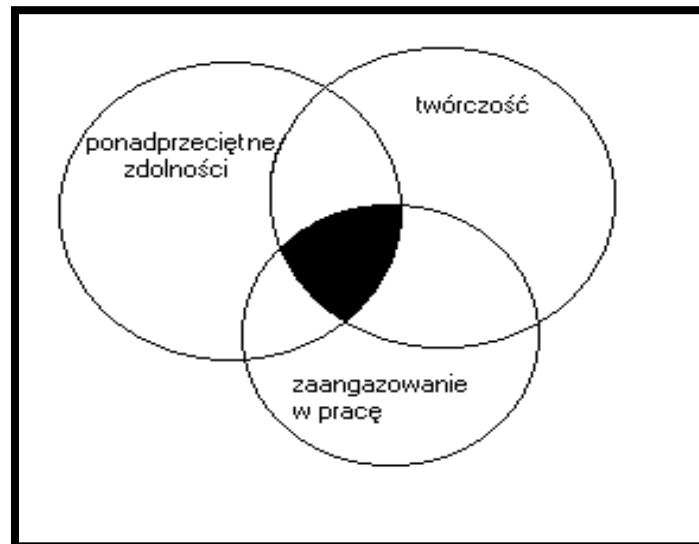
W przypadku wysokiego poziomu zdolności specjalnych używa się określenia uczeń uzdolniony

- **Trójpierścieniowy model zdolności Josepha Renzulliego**

Na zdolności składają się:

- ponadprzeciętne możliwości intelektualne,
- wysoki poziom zdolności twórczych (dywergencyjnych).
- zaangażowanie w pracę

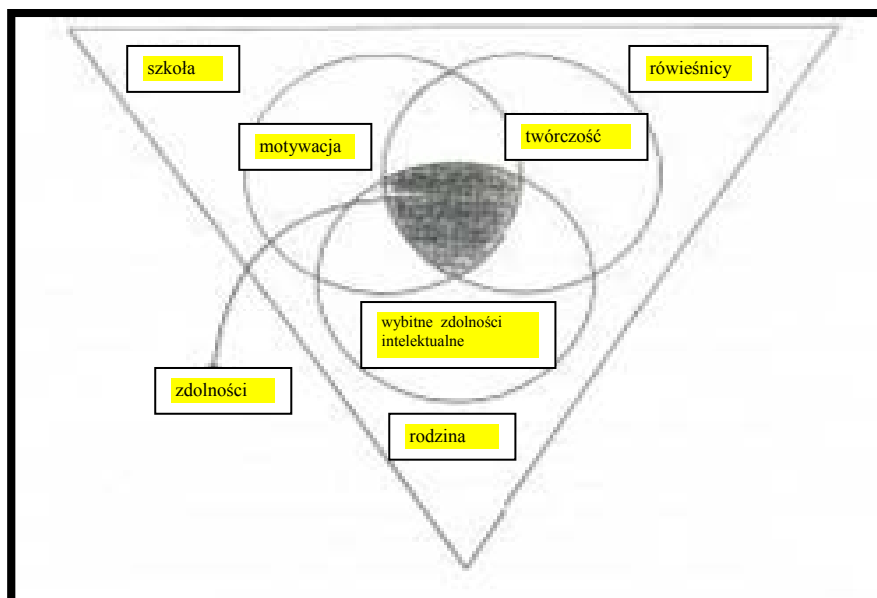
U osób wybitnie zdolnych występuje ścisła interakcja między tymi trzema zespołami cech. Inteligencja, uzdolnienia kierunkowe oraz twórczość (zdolności dywergencyjne) decydują o jakości i poziomie wytworów oraz działania. Czynnik „zaangażowanie w pracę” umożliwia twórcze działanie.



Trójpięścienny model zdolności J. S. Renzulliego.

- **Wieloczynnikowy model zdolności Franza J. Mönksa**

Zdolności są warunkowane nie tylko wysokim potencjałem intelektualnym, twórczością i odpowiednią motywacją, lecz także czynnikami środowiskowymi, zwłaszcza oddziaływaniem rodziny, szkoły i grup rówieśniczych - Limont, 1994. W przypadku, gdy któryś z czynników nie współdziała z pozostałymi występuje utrudnienie bądź hamowanie rozwoju zdolności.



Wieloczynnikowy model zdolności F. Monksa

- **Inteligencja**

Zdolność przystosowywania się do okoliczności, oparta na dostrzeganiu abstrakcyjnych relacji, korzystaniu z wcześniejszych doświadczeń i skutecznej kontroli nad własnymi procesami poznawczymi - E. Nęcka;

Umiejętność adaptacji do warunków środowiska, dopasowania środowiska do własnych potrzeb i wyboru kontekstu najbardziej odpowiedniego dla zadowalającego działania - R Sternberg, E. Nęcka

Rodzaje inteligencji:

- **matematyczno-logiczna** - przejawiająca się między innymi rozumieniem opartym na operowaniu abstrakcyjnymi symbolami oraz poszukiwaniem harmonii i porządku – dostrzeganiem związków przyczynowo-skutkowych oraz wewnętrznych struktur złożonych systemów, formułowaniu wniosków na podstawie fragmentarycznych informacji, szacowaniem wielkości, przeprowadzaniem dowodów, tworzeniem modeli i wysuwania hipotez;
- **językowa** - znajdująca wyraz w uczeniu się poprzez uważne słuchanie i czytanie tekstów oraz prowadzenie dyskusji, szukaniu własnych form ekspresji werbalnej i wykorzystywania języka, zgrabnym naśladowaniem lingwistycznych cech innych ludzi, nadawaniu wypowiedziom słownym rytmu i tworzeniu pojęć;
- **muzyczna** - dla której charakterystyczne jest wyczucie rytmu, rozpoznawanie układów dźwięków i zmian ich brzmienia, rozpoznawanie i rozróżnianie poszczególnych instrumentów muzycznych, zainteresowanie grą na nich i łatwość jej uczenia się, poszukiwanie własnych form wyrazu muzycznego, skłonność do improwizacji, reagowanie na zmiany w muzyce zmianami nastroju;
- **wizualno-przestrzenna** - dla której typowe są: uczenie się poprzez obserwowanie i tworzenie pamięciowych map, rozwinięta wyobraźnia, łatwość odtwarzania obrazów i ich przetwarzania oraz przewidywania ruchu obiektów, skłonność do sporządzania wykresów, map i innych schematów wizualnych, dobra koordynacja ruchów własnego ciała w przestrzeni;
- **cielesno-kinestetyczna** – przejawiająca się koncentracją na bodźcach związanych z dotykiem i ruchem, uczeniem się poprzez wykonywanie określonych działań, dobrą koordynacją fizyczną, wyczuciem czasu,

skłonnością do utrzymywania aktywności motorycznej oraz wyrażaniem za jej pośrednictwem emocji i myśli, dbałością o rozwój fizyczny, zręcznością i wdziękiem;

- **interpersonalna** - wyrażająca się w spostrzeganiu zdarzeń z różnych punktów widzenia, trafnym rozpoznawaniu myśli i uczuć innych osób oraz interpretowaniu ich zachowań, skutecznym komunikowaniu się werbalnym i pozawerbalnym, reagowaniu na potrzeby i poglądy ludzi, łatwości nawiązywania, kształtowania i utrzymywania relacji z nimi oraz wywierania na nich wpływu;
- **intrapersonalna** - dla której charakterystyczna jest rozwinięta świadomość własnych emocji, motywacji i myśli, postępowanie zgodne z własnymi standardami i celami, docenianie i dążenie do rozwoju wewnętrznego, refleksyjność, zainteresowanie historiami życiowymi przejawiające się na przykład czytaniem dzienników i biografii, podejmowanie prób odpowiedzi na pytania natury. Gardner, 2002

- **Uczeń zdolny w rozumieniu psychologicznym**

To taki uczeń, który posiada ponadprzeciętny iloraz inteligencji i określone charakterystyki osobowości, takie jak motywacja wewnętrzna i wysoka samoocena oraz jest twórczy, co oznacza, że potrafi wykraczać poza schematy, nie obawia się przyjmowania nietypowych punktów widzenia i poszukiwania nowych rozwiązań.

- **Uczeń zdolny w rozumieniu potocznym, także często szkolnym**

To taki uczeń, który dobrze się uczy i ma wzorowe zachowanie, jest posłuszny i grzeczny.

- **Twórczość**

Proces którego rezultatem jest stworzenie jakiejś nowości, mającej szansę przetrwania oraz odpowiadającej oczekiwaniom grupy ludzi stanowiącej w danym czasie określone środowisko społeczno-kulturowe. (M. Stein, 1997)

Aktywność przynosząca wytwory. (Z. Pietrasiński 1969)

Proces generowania nowych form zachowania. (Nęcka, 2001)

- **Myślenie konwergencyjne**

Aktywizuje się w sytuacjach problemowych, które ograniczają się w zasadzie do jednego rozwiązania, do jednej poprawnej odpowiedzi (np. testy wiadomości czy większość zadań matematycznych)

- **Myślenie dywergencyjne**

Włącza się w trakcie rozwiązywania problemów o wielu równie dobrych, możliwych rozwiązaniach.

- **Kreatywność**

Cecha indywidualna osób polegająca na zdolności do wytwarzania nowych pomysłów. (E. Nęcka , 2000);

Jest zdolnością człowieka do tworzenia wytworów nowych i wartościowych – to znaczy cenniejszych pod jakimś względem (estetycznym, praktycznym, naukowym itd.) od tego, co było do tej pory. (K. Szmidt, 2008).

- **Myślenie pytajne**

Dostrzeganie, formułowanie i reformułowanie pytań problemowych, wynikających z zaciekawienia i konstruktywnego niepokoju poznawczego. (Szmidt, 2006)

- **Osobowość twórcza**

Zespół dyspozycji poznawczych, emocjonalno-motywacyjnych i behawioralnych, który umożliwia jednostce reorganizowanie dotychczasowych doświadczeń, odkrywanie i konstruowanie czegoś dla niej nowego i wartościowego. (K. Szmidt 2001)

- **Postawa twórcza**

Ukształtowana (genetycznie i poprzez indywidualne doświadczenie) właściwość poznawcza i charakterologiczna, wykazująca tendencje, nastawienie lub gotowość do przekształcania świata rzeczy, zjawisk, a także własnej osobowości [...] aktywny stosunek do świata i życia, wyrażający się potrzebą poznawania, przeżywania i świadomego (co do celu, a nie procesu) przetwarzania zastanej rzeczywistości i własnego „ja”. (S. Popek, 1988)

- **Zjawisko NiL**

Nauczyciel eksploatujący przez lata rutynowo te same strategie nauczania, wykorzystujący tę samą wiedzę, kładący nacisk na adekwatność wypowiedzi i poprawność zachowań wywołuje w uczniach opisywane przez J. Kozińskiego (1996) „zjawisko NiL” – nudę i lęk.

- **Treningi twórczości**

System ćwiczeń stosowanych doraźnie w celu zwiększenia potencjału twórczego jednostki lub grupy osób. (E. Nęcka (1998)

- **Strategie rozwijania zdolności**

- **Wcześniej** np. przyspieszenie obowiązków szkolnych, możliwość promocji w trakcie roku szkolnego, możliwość wcześniejszego ukończenia szkoły
- **Więcej** np. przygotowanie do konkursów i olimpiad, możliwość udziału w zajęciach na uczelniach wyższych, zajęcia dodatkowe, system stypendialny, pomoc ze strony fundacji i stowarzyszeń, obozy, warsztaty, sesje naukowe
- **Inaczej** np. indywidualny program i tok nauki, indywidualizacja procesu dydaktycznego - zadania asystenckie, zadania dodatkowe, udział w prowadzeniu lekcji, wsparcie psychologiczno-pedagogiczne
- **Lepiej i mądrzej** np. rozwijanie umiejętności twórczego myślenia, stosowanie metod aktywizujących, doskonalenie zawodowe.

- **Kompetencje kluczowe**

Połączenie wiedzy, umiejętności i postaw odpowiednich do sytuacji. Kompetencje kluczowe to te, których wszystkie osoby potrzebują do samorealizacji i rozwoju osobistego.

Ustanowiono osiem kompetencji kluczowych:

- 1) porozumiewanie się w języku ojczystym;
- 2) porozumiewanie się w językach obcych;
- 3) kompetencje matematyczne i podstawowe kompetencje naukowo-techniczne;
- 4) kompetencje informatyczne;
- 5) umiejętność uczenia się;
- 6) kompetencje społeczne i obywatelskie;

- 7) inicjatywność i przedsiębiorczość;
- 8) świadomość i ekspresja kulturalna.

Kompetencje kluczowe uważane są za jednakowo ważne, ponieważ każda z nich może przyczynić się do udanego życia w społeczeństwie wiedzy. Zakresy wielu spośród tych kompetencji częściowo się pokrywają i są powiązane, aspekty niezbędne w jednej dziedzinie wspierają kompetencje w innej. Dobre opanowanie podstawowych umiejętności językowych, czytania, pisania, liczenia i umiejętności w zakresie technologii informacyjnych i komunikacyjnych (TIK) jest niezbędną podstawą uczenia się; umiejętność uczenia się sprzyja wszelkim innym działaniom kształceniowym. Niektóre umiejętności, takie jak - krytyczne myślenie, kreatywność, inicjatywność, rozwiązywanie problemów, ocena ryzyka, podejmowanie decyzji i konstruktywne kierowanie emocjami - są istotne we wszystkich ośmiu kompetencjach kluczowych. (Zalecenie Parlamentu Europejskiego i Rady, 2006)

- **Diagnoza uzdolnień**

Wieloaspektowe badanie różnic jakościowych i ilościowych w uzdolnieniach uczniów z wykorzystaniem odpowiednich narzędzi diagnostycznych. W diagnozie stosuje się dwa kryteria rozpoznawania uzdolnień:

- psychologiczne - które opiera się na badaniu poziomu inteligencji, zdolności specjalnych ucznia oraz cech charakteru i osobowości;
- psychopedagogiczne – które opiera się na badaniu osiągnięć ucznia

- **Test diagnozy uzdolnień kierunkowych uczniów**

- **Testy dydaktyczne** – rodzaj sprawdzianu pisemnego, polegający na rozwiązaniu w warunkach standardowych określonej liczby zadań, przy ustalonych z góry poprawnych odpowiedziach. Miarą wartości testu jest jego trafność, rzetelność, obiektywność i praktyczność. Celem każdego testu dydaktycznego jest mierzenie osiągnięć uczniów.
- **Testy psychologiczne** - zbiór zadań, które stawiamy przed badanym i na podstawie wyników wnioskujemy o nasileniu danej cechy, stanu czy procesu.

- **Metoda projektu**

W tradycyjnym rozumieniu metoda projektu to jedna z metod nauczania, zaliczana do metod praktycznych, aktywizujących, problemowych, polegająca na samodzielnym

realizowaniu przez uczniów zadania przygotowanego przez nauczyciela lub w porozumieniu z uczniami na podstawie wcześniej ustalonych założeń.

Metoda projektu w rozumieniu innowacyjnym (zastosowanym w projekcie DiAMEnT) to jedna z metod nauczania oparta na PBL (problem based learning – uczenie się na bazie problemu / uczenie się w oparciu o problem), strategii edukacyjnej, która cechuje się tym, że uczniowie uczą się przez rozwiązywanie problemu. Metoda projektu jest więc ściśle związana z nauczaniem problemowym (jest metodą problemową). Uczniowie realizują projekt edukacyjny nie dla uzyskania określonego produktu, choć on też odgrywa ważną rolę, ale dla rozwiązania problemu, a poszukiwanie tego rozwiązania pozwoli im nabyć określone umiejętności i poszerzyć wiedzę z danego obszaru. Istotnym elementem tej metody jest sformułowanie problemu do rozwiązania. Temat projektu powinien mieć formę pytania problemowego, szeroki zakres (tak, by można go rozpisać na szereg problemów szczegółowych, nad którymi będą pracować uczniowie), odnosić się do rzeczywistości, mieć odniesienia społeczne, uwzględniać przyszłość, umożliwiać wywołanie związku emocjonalnego, integrować wiedzę, a nie treści, skupiać się na poszukiwaniu, które pozwoli na generowanie umiejętności i wiedzy.

Wyznaczniki projektu jako metody nauczania

- ma określone cele,
- efektem działań uczniów jest rozwiązanie problemu,
- ma wyznaczone terminy realizacji poszczególnych zadań i całości przedsięwzięcia,
- ma określonych realizatorów poszczególnych zadań,
- rezultaty prezentowane są publicznie.

- **Problem Based Learning (PBL)**

Nauczanie poprzez rozwiązywanie problemów. Według Howarda Barrowsa, twórcy idei PBL, metodę tę charakteryzuje 6 składników:

- jest skoncentrowana na uczniu;
- uczniowie pracują w małych grupach;
- nauczyciel pełni rolę facylitatora – wspomaga proces komunikacji wewnątrz grupy, motywuje do pracy;
- grupy pracują nad rozwiązaniem zadań praktycznych;

- uczniowie rozwijają podczas pracy umiejętności miękkie (na umiejętności te składa się między innymi asertywność, zdolności interpersonalne, zdolności radzenie sobie ze stresem i presją czasu, czy kompetencje przywódcze);
- uczniowie zdobywają narzędzia i informacje poprzez pracę w grupie i indywidualne zaangażowanie.□

Jest to metoda skoncentrowana na odbiorcy – czyli uczniu. Proces nauczania według filozofii PBL jest ściśle związany z obecnością problemu, zadania, które należy rozwiązać. Wiedza jest ukryta w zadaniu, a cele kształcenia są realizowane podczas prac nad jego rozwikłaniem. Uczniowie w zespołach pracują nad rozwiązaniem praktycznego zagadnienia modelującego pewne elementy rzeczywistości. PBL jest metodą kształcenia – uczenia się opartą zarówno na współpracy w zespole, jak i na pracy indywidualnej. Jest metodą stymulującą poszukiwanie informacji i jej przetwarzanie. Zmusza do refleksji, do krytycznej oceny i do wartościowania zdobytych elementów wiedzy pod kątem ich efektywności i przydatności do rozwiązania problemu.

Praca ucznia nad projektem służy kreatywności, działa inspirująco i uczy odpowiedzialności. Wykładowca występuje w roli opiekuna – pomaga w podejmowaniu decyzji, pracuje nad starannym doбором tematów zadań i steruje stopniem ich trudności. Pełni rolę życzliwego przewodnika organizującego w początkowej fazie prace nad projektem, następnie moderatora zawsze gotowego wspomóc uwagami grupę, ale nigdy nie podającego gotowych rozwiązań.□

Efekty pracy zespołów projektowych prezentowane są publicznie. Ocena jest dyskutowana wspólnie przez wszystkich uczniów i nauczyciela.□

Cechą charakterystyczną metody PBL jest przejrzystość zadania i wspólna dla całego zespołu determinacja w realizacji celu. Już w trakcie fazy wstępnej, przy analizie problemu, uczniowie omawiają wspólnie, jakie umiejętności i jakiego typu wiedza będzie im potrzebna. Cele nie są im narzucane. Uczniowie sami je odnajdują i traktują je jako osobiste ścieżki wyznaczające drogę do rozwiązania zagadnienia. Problemy zawsze są autentyczne, przedstawiające praktyczne zadania, nierzadko typu optymalizacyjnego czy udoskonalającego.□

PBL wspomaga ucznia w utożsamieniu się z zadaniem, zapewnia refleksję nad zdobytą wiedzą i procesem poznawczym, pobudza do weryfikacji i wymiany pomysłów i idei.□

Ponieważ problemy są środkiem/narzędziem do rozwoju umiejętności, stąd efektami kształcenia są:

- twórcze i krytyczne myślenie,
- rozpoznanie i rozwiązywanie kompleksowych, rzeczywistych problemów poprzez znalezienie i ocenę dostępnych poza środowiskiem szkolnym zasobów,
- efektywna praca w grupie,
- komunikacja interpersonalna, akceptowanie odmiennych od własnego punktów widzenia,
- zastosowanie zdobytych umiejętności intelektualnych do uczenia się ustawicznego,
- adaptacja do zmiany i uczestnictwa w niej,
- podejmowanie racjonalnych decyzji w nowych sytuacjach,
- stosowanie podejścia holistycznego, całościowego,
- identyfikowanie własnych słabych i silnych stron.

- **Projekt edukacyjny**

Jest to zadanie problemowe z określonymi celami, długoterminowe, realizowane indywidualnie lub w zespole pod nadzorem nauczyciela, w ściśle określonym czasie, polegające na samodzielnym i dogłębnym zbadaniu danego problemu i zaprezentowaniu rozwiązania. Może być powiązany z realizacją programu nauczania jednego lub wielu przedmiotów, może też wykraczać poza program.

- **Pytanie napędzające (*driving question*)**

Problem do rozwiązania postawiony w postaci pytania problemowego, nad którym pracują uczniowie w zespole projektowym. Pytanie powinno mieć na tyle szeroki zakres, aby dało się je rozpisać na szereg pytań szczegółowych, pomocnych w realizacji projektu.

- **Kryteria oceny projektu**

Mierniki służące do sformułowania oceny projektu. Powinny dotyczyć wszystkich etapów realizacji projektu oraz uwzględniać współpracę w zespole. Należy je określić przed rozpoczęciem wykonywania działań projektowych. Uczniowie powinni brać

udział w formułowaniu tych kryteriów i przed rozpoczęciem pracy mieć pełną świadomość, co w projekcie jest ważne i co będzie podlegać ocenie.

- **Rodzaje projektów**

Projekty edukacyjne dzielimy na kilka kategorii, a kryteriami podziału są:

- zakres,
- podział pracy,
- cel projektu,
- forma pracy uczniów,
- struktura projektu.

Ze względu na zakres

- **Projekty przedmiotowe/problemowe**

Tematyka obejmuje zakres jednego przedmiotu/ jednorodnego problemu. Celem takiego projektu jest zaznajomienie z nową tematyką lub porządkowanie nabytej wiedzy i umiejętności, albo też rozszerzenie tematyki zajęć o zagadnienia pozaprogramowe. Zazwyczaj projekty te prowadzone są przez nauczyciela jednego przedmiotu.

- **Projekty międzyprzedmiotowe**

Mają integrować wiedzę i umiejętności z różnych przedmiotów. Celem takiego projektu jest zwykle analiza problemu z różnych punktów widzenia, co zwiększa praktyczny wymiar projektu. Projekty tego typu prowadzone przez jednego nauczyciela, ale przy współdziałaniu (konsultacjach) z innymi nauczycielami.

Ze względu na podział pracy

- **Projekty indywidualne** – realizowane przez jednego ucznia
- **Projekty grupowe** – realizowane przez grupę uczniów z wyraźnym podziałem zadań.

Ze względu na cele projektu

- **Projekty badawcze**

Polegają na zebraniu i usystematyzowaniu przez uczniów informacji w odniesieniu do wybranego problemu, opracowaniu danych, wyciągnięciu wniosków, będących rozwiązaniem problemu i prezentacji efektów. Ważnym elementem projektu badawczego jest sposób sformułowania problemu, który postawi ucznia w roli badacza.

- **Projekty działania lokalnego**

Podjęcie długoterminowego działania na rzecz klasy, szkoły, środowiska lokalnego.

Ze względu na formę pracy uczniów

- **Projekty jednorodne**

Projekty wykonywane przez uczniów lub zespoły w takim samym czasie, polegające na wykonaniu takiego samego zadania, obejmującego cały zakres tematyki projektu.

- **Projekty zróżnicowane**

Projekty wykonywane przez zespoły uczniowskie realizujące różne zadania, składające się na całość tematyki projektu, wykonywane jednocześnie lub rozłożone w czasie.

Ze względu na strukturę projektu

- **Projekty silnie ustrukturyzowane**

Projekty, w których nauczyciel podaje temat i określone wymagania, szczególnie dotyczące zakresu projektu i spodziewanych rezultatów.

- **Projekty słabo ustrukturyzowane**

Projekty, które pozostawiają uczniom swobodę w wyborze tematu i zakresu projektu, określeniu sposobów realizacji oraz efektów i ich prezentacji.

- **Centrum Wspierania Uczniów Zdolnych**

Centrum Wspierania Uczniów Zdolnych – placówka, w której organizowane są zajęcia pozaszkolne dla uczniów z różnych etapów kształcenia o poznawczych uzdolnionych kierunkowych. Na zajęcia są kierowani tylko uczniowie zdiagnozowani, zajęcia są realizowane w oparciu o specjalnie opracowane programy dla uczniów zdolnych z wykorzystaniem metody projektu i strategii PBL, a prowadzący są przygotowani do ich realizacji.

- **Zajęcia pozaszkolne dla uczniów zdolnych**

Zajęcia realizowane poza strukturą zajęć szkolnych (np. w CWUZ) dla zdiagnozowanych uczniów zdolnych zorganizowanych w grupy o podobnych uzdolnieniach kierunkowych. Celem zajęć prowadzonych przez wyspecjalizowaną kadrę jest rozwijanie uzdolnień kierunkowych uczniów poprzez realizację specjalnych programów z zastosowaniem odpowiednich metod.

- **Zajęcia pozalekcyjne**

Według W. Okonia to nieobowiązkowa wykonywana w czasie wolnym działalność uczniów w obrębie szkoły obejmująca zajęcia w organizacjach młodzieżowych, kołach zainteresowań, świetlicy, sali gimnastycznej lub na boisku czy w ogrodzie szkolnym. Zajęcia organizowane przez szkołę, odbywające się w szkole lub poza jej terenem, mają charakter fakultatywny, nie są częścią obowiązkowego programu szkolnego, a udział w nich jest dobrowolny.

Zajęcia realizowane w kołach zainteresowań, masowych zajęciach kulturalnych, sportowych, a ich celem jest rozwijanie i rozbudzanie zainteresowań uczniów oraz zagospodarowanie ich wolnego czasu.

SPIS TREŚCI

Słowo wstępne.....	2
Założenia dydaktyczno-wychowawcze programu zajęć pozaszkolnych z matematyki dla uczniów zdolnych	4
Moduł I	
Matematyka nie jest po to, aby nauczyć liczyć	13
Moduł II	
Pojęcie funkcji, ciągu i zastosowanie liczby e	16
Moduł III	
Układy równań i nierówności – czy jest to dział algebry, a może geometrii czy trygonometrii?	18
Moduł IV	
Z miasta A do miasta B – czy mechanika jest częścią fizyki czy matematyki?	20
Moduł V	
Krzywe stożkowe, a może inne krzywe – wykres funkcji czy równania?	23
Moduł VI	
Wielomiany – czy przydałby się na giełdzie?	26
Moduł VII	
Co to znaczy zwinąć szereg, a co to znaczy rozwinąć funkcję w szereg?	28
Moduł VIII	
Budujemy osiedle - czy budowle mogą mieć nietypowe kształty?	30
Moduł IX	
Prawdopodobieństwo i statystyka – co możemy przewidzieć, czy to prawda, czy fałsz?	32
Moduł X	
Gdy niemożliwe staje się możliwe – liczby zespolone	35
Słownik terminów związanych z systemem wspierania uczniów zdolnych	38